

無理方程式・無理不等式の同値変形の楽な覚え方

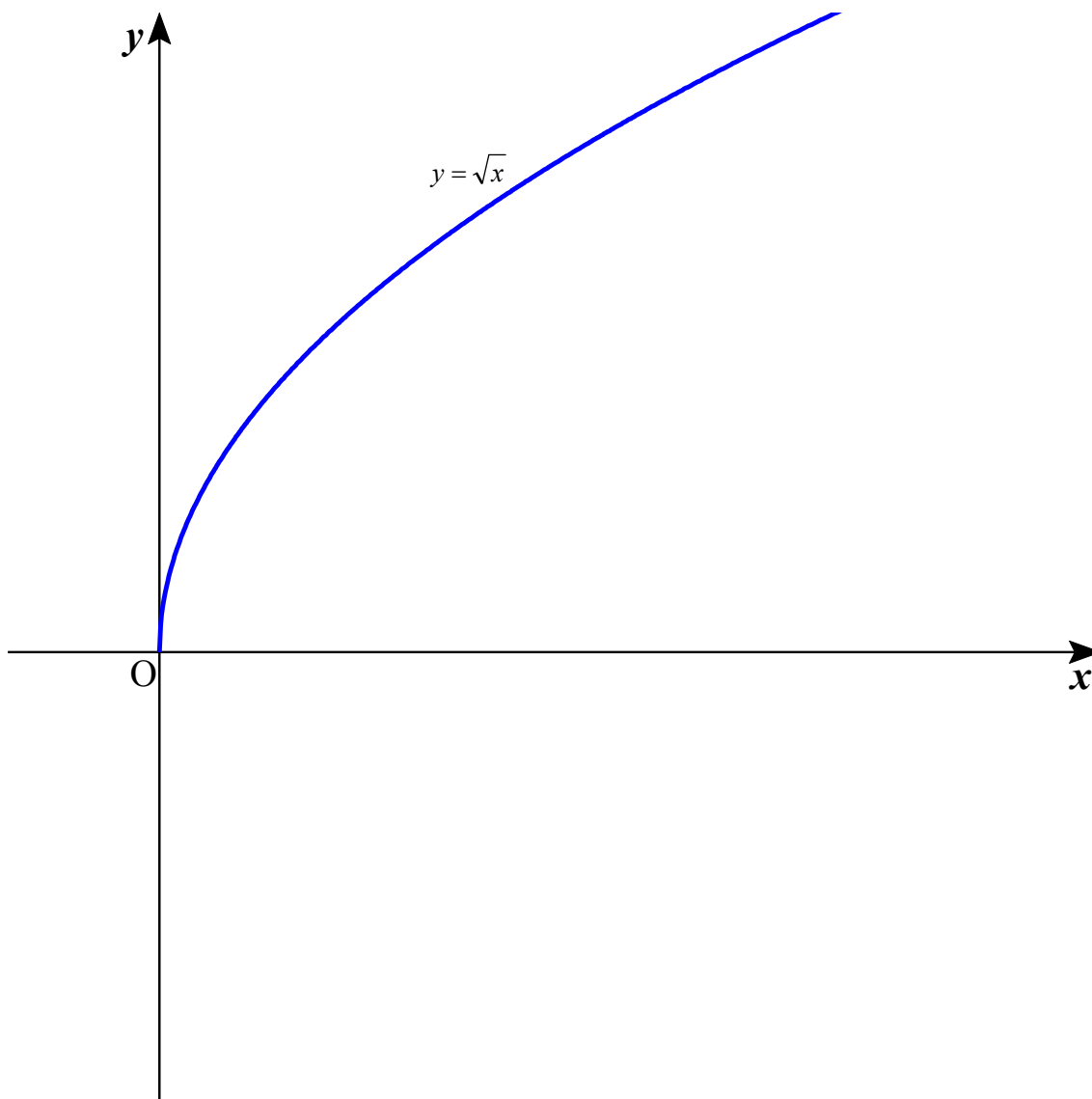
$$1. \quad y = \sqrt{x} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = x \\ y \geq 0 \end{cases}$$

y を $f(x)$, x を $g(x)$ に置き換えると,

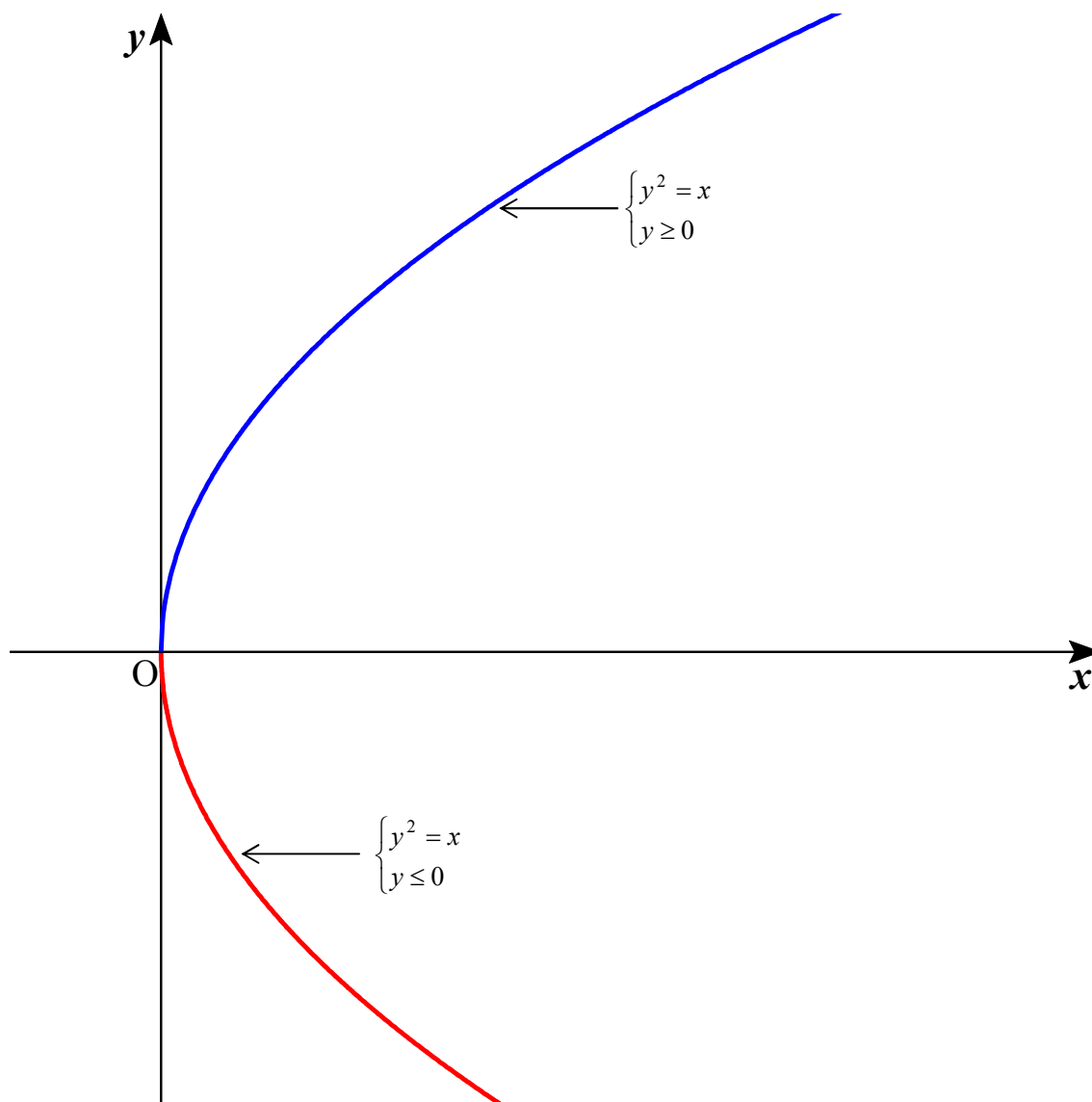
$$f(x) = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} \{f(x)\}^2 = g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

解説図

$y = \sqrt{x}$ のグラフ



$y^2 = x$ のグラフ



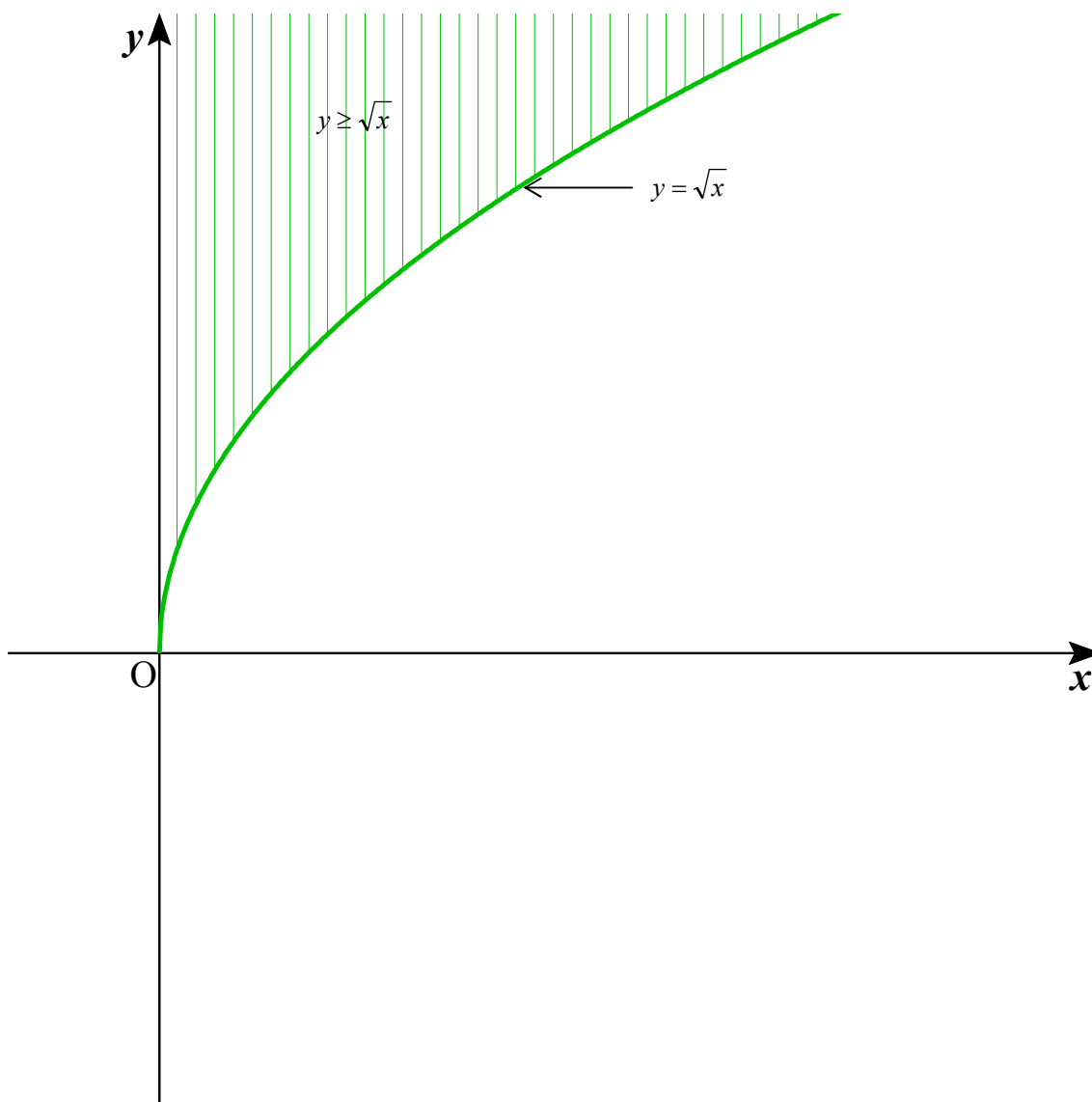
$$2. \quad y \geq \sqrt{x} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 \geq x \\ y \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

y を $f(x)$, x を $g(x)$ に置き換えると,

$$f(x) \geq \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} \{f(x)\}^2 \geq g(x) \\ f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

解説図

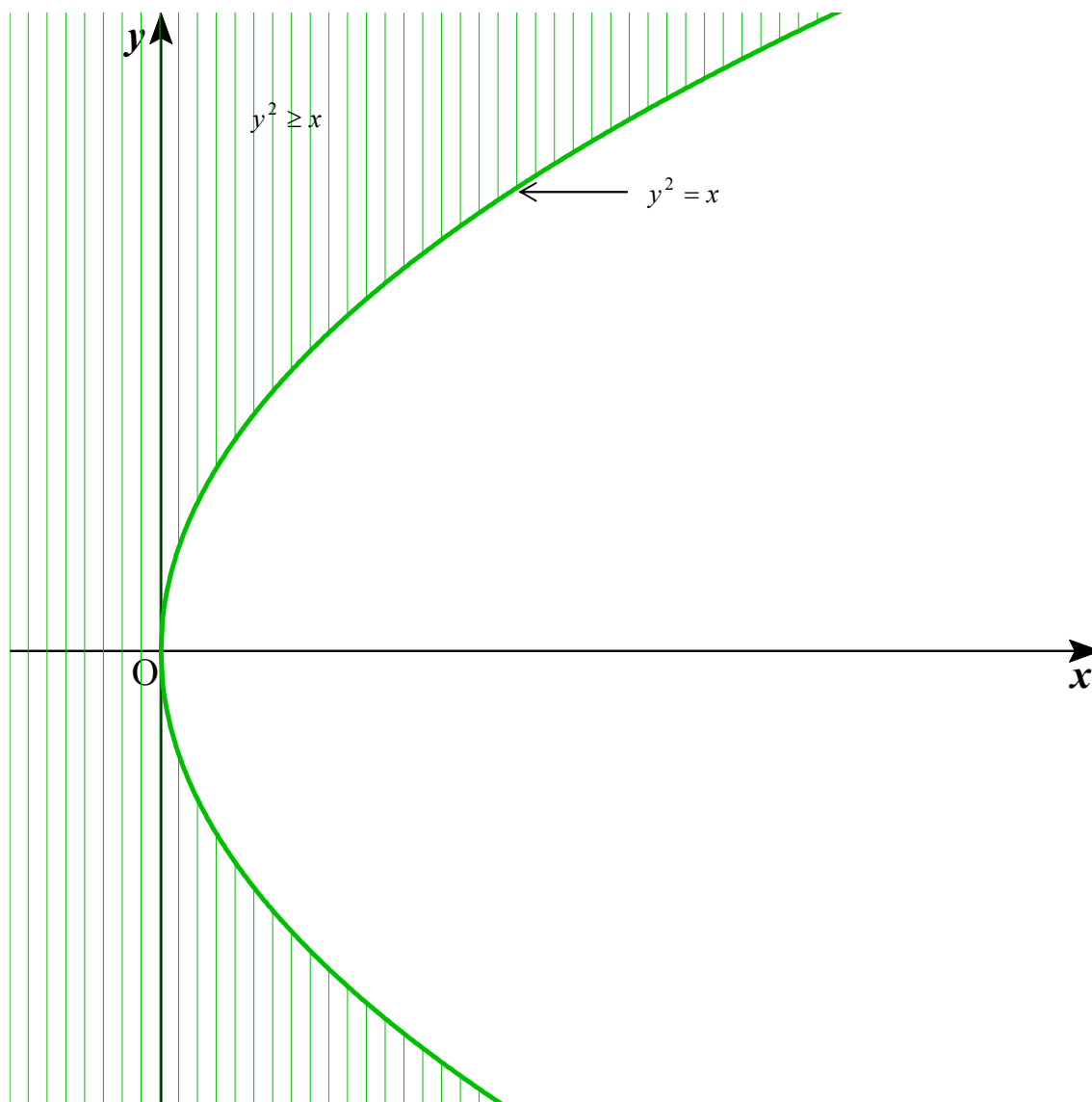
$y \geq \sqrt{x}$ を満たす領域を下に示す。

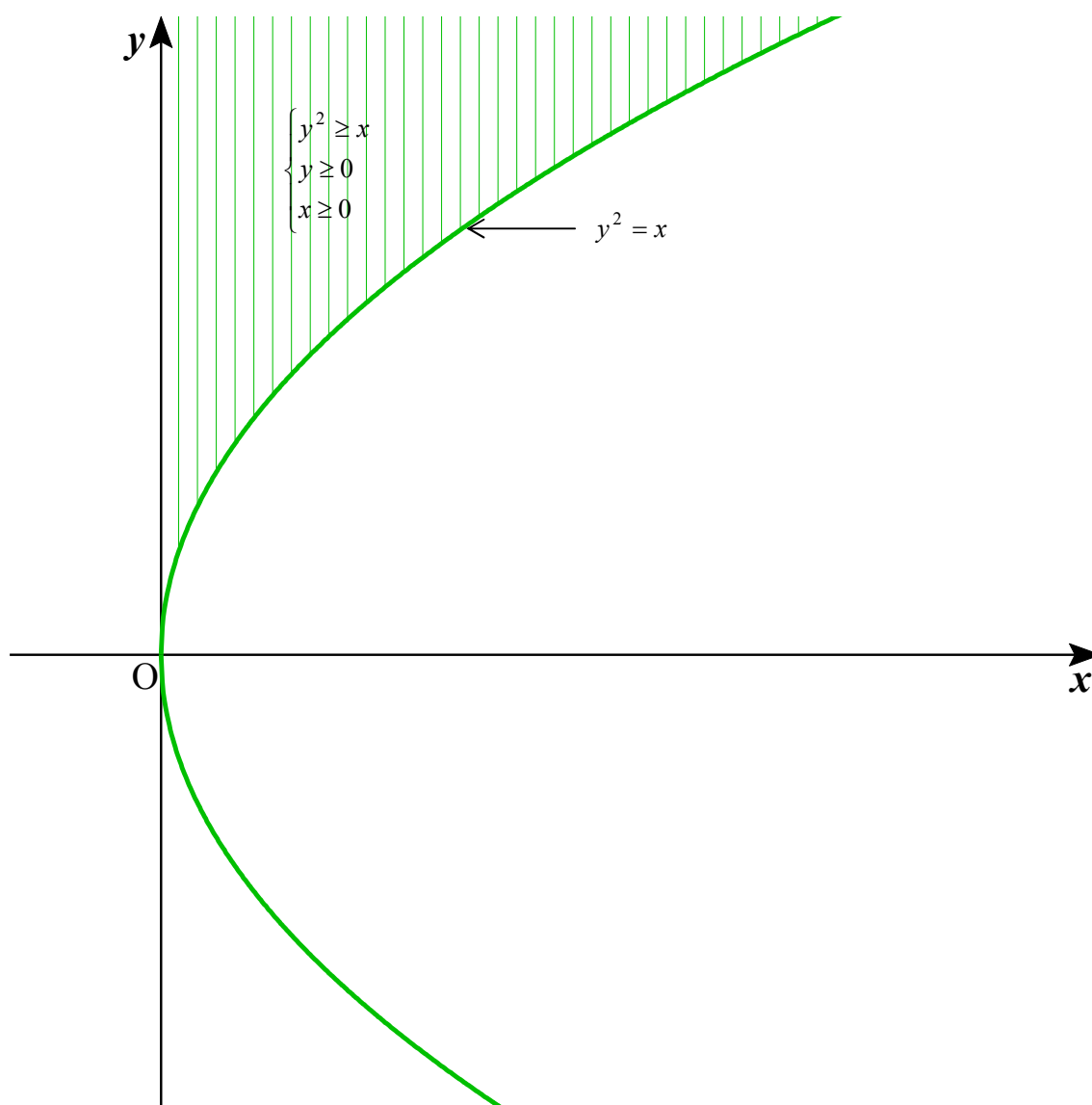


$y^2 \geq x$ を満たす領域を下に示す。

この領域のうち、 $y \geq \sqrt{x}$ を満たす部分は、 $y^2 \geq x$ かつ $y \geq 0$ かつ $x \geq 0$ の部分であるから、

$$y \geq \sqrt{x} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 \geq x \\ y \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$





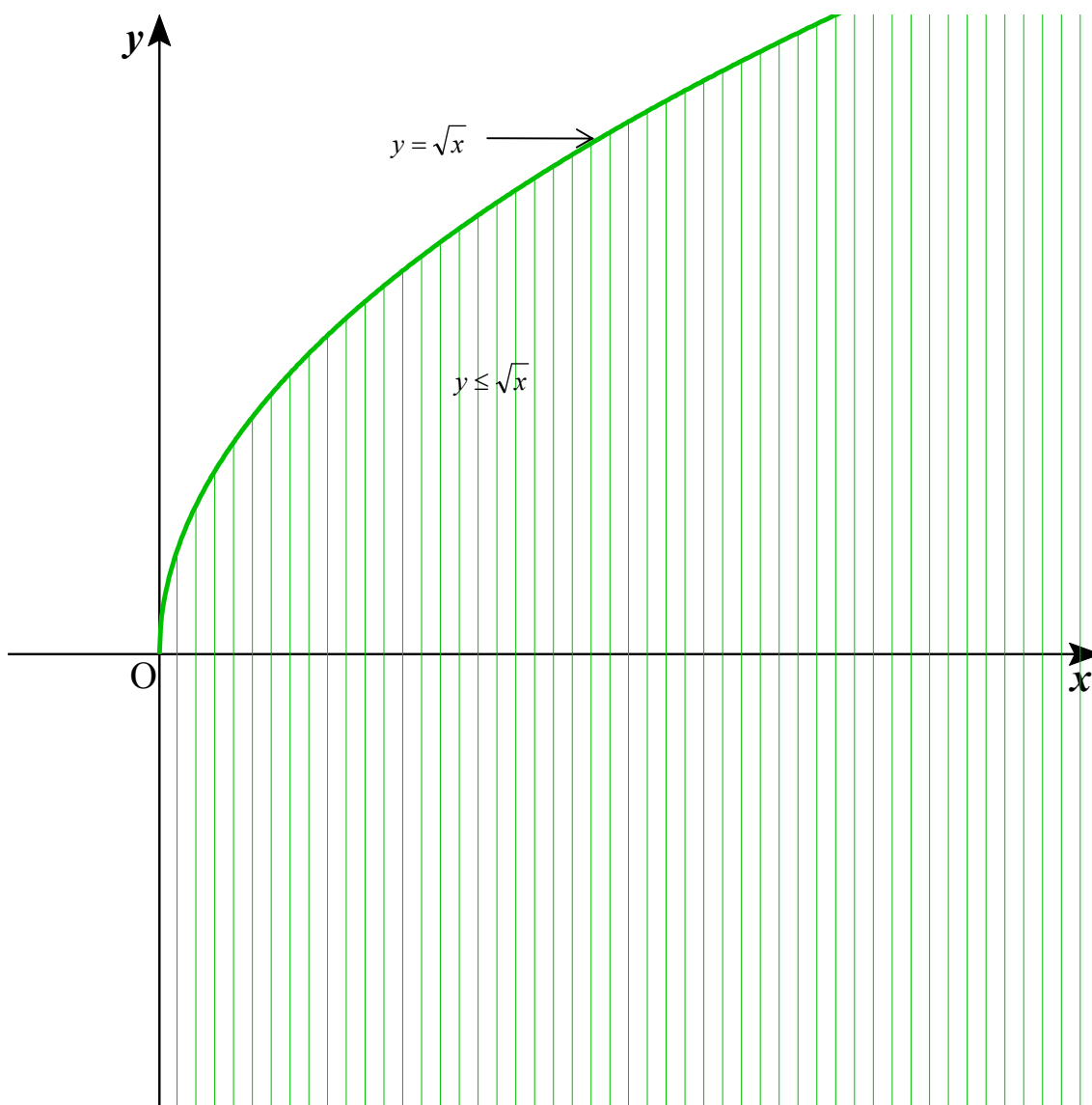
$$3. \quad y \leq \sqrt{x} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \text{ または } \begin{cases} y^2 \leq x \\ y \geq 0 \end{cases}$$

y を $f(x)$, x を $g(x)$ に置き換えることにより,

$$f(x) \leq \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \text{ または } \begin{cases} \{f(x)\}^2 \leq g(x) \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$$

解説図

$y \leq \sqrt{x}$ を満たす領域を下に示す。



$y^2 \leq x$ を満たす領域を下に示す。

したがって、 $y \leq \sqrt{x}$ を満たす領域は、

$y^2 \leq x$ かつ $y \geq 0$ を満たす領域と $y \leq 0$ かつ $x \geq 0$ を満たす領域の和で表すことができる。

よって、 $y \leq \sqrt{x} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$ または $\begin{cases} y^2 \leq x \\ y \geq 0 \end{cases}$

